Antwoorden Oefenvragen

HAVO

Wiskunde B

Examenjaar 2025-2026

examen
overzicht.nl

Inhoudsopgave

1. Algemeen: algebraïsche vaardigheden

1.1 Algebraïsche vaardigheden

1. Wiskunde B HAVO 2021, tijdvak 1, vraag 6

Oefenvraag examen 2021 tijdvak 1 – vraag 6

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$.

De grafiek van f is een parabool.
Bewijs dat de top van de parabool op de x-as ligt.

Maximumscore 2 punten

Het juiste antwoord is:

- De x-coördinaat van de top is $-\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$.
- $f(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 + -2 + 1 = 0$ (dus de top van de parabool ligt op de x-as).

Of:

- $f'(x) = \frac{1}{2}x + 1$; uit $f'(x) = 0$ volgt dat de x-coördinaat van de top -2 is.
- $f(-2) = \frac{1}{4} \cdot (-2)^2 + -2 + 1 = 0$ (dus de top van de parabool ligt op de x-as).

Of:

- De discriminant D van de vergelijking $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0$ moet nul zijn.
- $D = 1^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = 0$ (dus de top van de parabool ligt op de x-as).

Of:

- $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4x + 4) = \frac{1}{4}(x + 2)^2$.
- Dus de coördinaten van de top zijn $(-2, 0)$ (dus de top van de parabool ligt op de x-as).

2. Functies, grafieken en vergelijkingen

2.1 Standaardfuncties

2. Wiskunde B HAVO 2025, tijdvak 2, vraag 1

Oefenvraag examen 2025 tijdvak 2 – vraag 1

De functie f wordt gegeven door $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$.

De grafiek van f heeft twee toppen.

De rechter top ligt op de x-as.

Bewijs dit.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$
- In de toppen geldt $3x^2 - 18x + 24 = 0$ (of $x^2 - 6x + 8 = 0$)
- Beschrijven hoe deze vergelijking exact kan worden opgelost
- Dit geeft $x = 2$ of $x = 4$
- De y-coördinaat van de rechter top is $f(4) = 0$ (dus de rechter top ligt op de x-as)

3. Wiskunde B HAVO 2023, tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag examen 2023 tijdvak 1 – vraag 1

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2\sqrt{3x - 5}$.

Bereken op exacte wijze het domein van f.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- De vergelijking $3x - 5 = 0$ moet worden opgelost.
- Dit geeft $x = \frac{5}{3}$.
- (Voor $x \geq \frac{5}{3}$ is $3x - 5 \geq 0$, dus het domein van f is) $x \geq \frac{5}{3}$.

Of

- De ongelijkheid $3x - 5 \geq 0$ moet worden opgelost.
- $3x \geq 5$.
- Dus $x \geq \frac{5}{3}$ (dus dit is het domein van f).

4. Wiskunde B HAVO 2022, tijdvak 2, vraag 9

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 2 – vraag 9

De Air Quality Index (*AQI*) is een waarde die overheden gebruiken om aan te geven hoe vervuild de lucht is: hoe hoger de *AQI*, des te sterker is de luchtvervuiling. De *AQI* wordt berekend uit de ozonconcentratie *C* in ppm. De ppm is een veelgebruikte eenheid voor concentratie.

Men heeft de mogelijke waarden van de *AQI* in categorieën opgedeeld. In de tabel is voor elke categorie luchtkwaliteit te zien welke waarden van *C* en de *AQI* daarbij horen. Zo is de laagste waarde van de *AQI* in de categorie 'gemiddeld' gelijk aan 50 en dat is het geval als $C = 0{,}065$.

Tabel

categorie luchtkwaliteit	C (ppm)	AQI
goed	0 – 0,065	0 – 50
gemiddeld	0,065 – 0,085	50 – 100
ongezond voor kinderen en ouderen	0,085 – 0,105	100 – 150
ongezond	0,105 – 0,125	150 – 200
erg ongezond	0,125 – 0,375	200 – 300

Binnen elke afzonderlijke categorie is er een stijgend lineair verband tussen de *AQI* en *C*.

Op een bepaalde plek wordt een ozonconcentratie gemeten van 0,20 ppm.
Bereken de bijbehorende *AQI*. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- De waarde 0,20 ppm ligt in de categorie 'erg ongezond' of: de coördinaten (0,125; 200) en (0,375; 300) zijn nodig.
- De richtingscoëfficiënt is $\frac{300-200}{0{,}375-0{,}125}$ (= 400).
- (Dus geldt $AQI = 400C + b$; $300 = 400 \cdot 0{,}375 + b$, waaruit volgt) $AQI = 400C + 150$.
- De gevraagde *AQI* is dan ($400 \cdot 0{,}2 + 150 =$) 230.

Of

- De waarde 0,20 ppm ligt in de categorie 'erg ongezond' of: de coördinaten (0,125; 200) en (0,375; 300) zijn nodig.
- De richtingscoëfficiënt is $\frac{300-200}{0{,}375-0{,}125}$ (= 400).
- $0{,}2 - 0{,}125 = 0{,}075$.
- De gevraagde *AQI* is dan ($200 + 0{,}075 \cdot 400 =$) 230.

5. Wiskunde B HAVO 2018, tijdvak 1, vraag 6

Oefenvraag examen 2018 tijdvak 1 – vraag 6

Hardlopers die regelmatig een bepaalde afstand lopen, zijn vaak nieuwsgierig naar hun eindtijd op een andere afstand. De Amerikaanse onderzoeker Pete Riegel stelde in 1977 de volgende formule op:

$$v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^{0{,}06}$$

Hiermee kan met behulp van de bekende gemiddelde snelheid v_1 op een bepaalde afstand s_1, de te verwachten gemiddelde snelheid v_2 op een andere afstand s_2 worden uitgerekend.
Hardlopers gebruiken vaak de volgende vuistregel: als de afstand verdubbelt, dan neemt je gemiddelde snelheid met 6% af.

Onderzoek of de bovenstaande formule aan deze vuistregel voldoet.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- Afstand s_2 is twee keer zo groot als afstand s_1, dus $\frac{s_1}{s_2} = \frac{1}{2}$
- $v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0{,}06} = 0{,}95 \ldots \cdot v_1$
- (Dit is geen afname met 6%) dus de formule voldoet niet aan de vuistregel.

6. Wiskunde B HAVO 2024, tijdvak 1, vraag 12

Oefenvraag examen 2024 tijdvak 1 – vraag 12

Er zijn vele soorten bier, die allemaal anders smaken. De smaak van bier wordt deels bepaald door de mate van bitterheid. Deze bitterheid wordt voornamelijk bepaald door het ingrediënt hop, dat tijdens het brouwen wordt toegevoegd. Hop bevat alfazuren die tijdens het koken worden omgezet in iso-alfazuren. Deze iso-alfazuren bepalen hoe bitter het bier is.

Hoe langer het bier gekookt wordt, hoe meer alfazuren omgezet worden in iso-alfazuren. Zo is na 5 minuten koken 4,5% van de alfazuren omgezet en na 45 minuten koken 24,2%.

Voor kooktijden tussen 5 en 45 minuten is er bij benadering een exponentieel verband tussen de kooktijd *t* in minuten en het percentage alfazuren *P* dat is omgezet. Uit de gegevens volgt dat:

$$P = 4{,}5 \cdot 1{,}043^t$$

Hierbij staat $t = 0$ voor het moment dat het bier 5 minuten heeft gekookt.

De groeifactor per minuut bij dit exponentiële verband is afgerond op drie decimalen gelijk aan 1,043.
Bereken deze groeifactor per minuut in vijf decimalen.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- (De groeifactor per 40 minuten is) $\frac{24{,}2}{4{,}5}$ (= 5,377...).
- (De groeifactor per minuut is dan) $\left(\frac{24{,}2}{4{,}5}\right)^{\frac{1}{40}}$
- Dus de groeifactor per minuut is (1,042953..., dus) 1,04295.

Of

- De vergelijking $4{,}5 \cdot g^{40} = 24{,}2$ moet opgelost worden.
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost.
- (g = 1,042953..., dus) de groeifactor per minuut is 1,04295.

7. Wiskunde B HAVO 2021, tijdvak 2, vraag 11

Oefenvraag examen 2021 tijdvak 2 – vraag 11

De bruine rat, de Japanse oester en de Amerikaanse vogelkers zijn voorbeelden van dier- en plantensoorten die oorspronkelijk niet in Nederland voorkwamen, maar die bewust of onbewust door de mens in Nederland zijn ingevoerd. Zulke soorten worden **exoten** genoemd.

[...] Neem aan dat het aantal exoten sinds 1 januari 1910 exponentieel is gegroeid. Dan volgt uit de gegevens voor de periode 1910 – 1950 dat dit aantal elke tien jaar met ongeveer 20% is toegenomen.

We gaan bij de volgende vraag uit van een toename van 20% per tien jaar.

Bereken na hoeveel jaar het aantal exoten volgens de bovenstaande exponentiële groei voor het eerst verdubbeld is. Geef je eindantwoord in hele jaren.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- De vergelijking $1{,}20^t = 2$ (met t in tientallen jaren) moet worden opgelost.
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden.
- Hieruit volgt $t = 3{,}80...$
- Het aantal exoten is voor het eerst verdubbeld na 39 jaar.

Of:

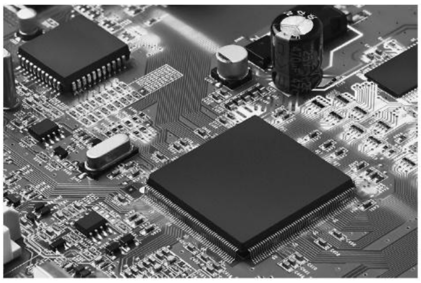
- Voor de groeifactor per jaar g geldt $g = (1{,}20)^{\frac{1}{10}}$ waaruit volgt dat $g = 1{,}018...$
- De vergelijking $1{,}018...^t = 2$ (met t in jaren) moet worden opgelost.
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden.
- Hieruit volgt $t = 38{,}0...$ dus het aantal exoten is voor het eerst verdubbeld na 39 jaar.

8. Wiskunde B HAVO 2021, tijdvak 3, vraag 1

Oefenvraag examen 2021 tijdvak 3 – vraag 1

In een smartphone zit een processor. Zo'n processor bestaat meestal uit veel uiterst kleine transistors. Het aantal transistors in een processor is in de loop van de jaren enorm toegenomen.

Een producent van smartphones bracht in september 2013 een telefoon op de markt met een processor die 1 miljard transistors bevatte. Diezelfde producent heeft elk opvolgend jaar, steeds in september, een nieuwe telefoon uitgebracht. In 2018 bracht deze producent een telefoon uit met een processor die 6,9 miljard transistors bevatte. Neem aan dat het aantal transistors in een processor in de tussentijd exponentieel groeide en dat deze groei zich in de jaren daarna voortzette. Je kunt dan voor de telefoon die de producent in 2021 uitbrengt, berekenen hoe groot het aantal transistors is dat de processor van die telefoon zal bevatten.



Bereken dit aantal in miljarden. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- De groeifactor per vijf jaar is ($\frac{6,9}{1}$ =) 6,9.
- De groeifactor per jaar is $6,9^{\frac{1}{5}}$ (= 1,47...).
- In 2021 zal het aantal transistors $1,47...^{8}$ ≈ 22 (miljard) zijn.

9. Wiskunde B HAVO 2022, tijdvak 3, vraag 6

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 3 – vraag 6

In een warmtemotor, bijvoorbeeld de motor van een auto, wordt de totale hoeveelheid energie die in brandstof aanwezig is nooit helemaal omgezet in bewegingsenergie. Het **rendement** van een warmtemotor is het percentage van de totale hoeveelheid energie dat wel wordt omgezet in bewegingsenergie.
Door technische vooruitgang neemt het rendement van warmtemotoren toe. Men gaat ervan uit dat deze ontwikkeling zich de komende jaren blijft voortzetten.

Om deze groei van het rendement in de tijd te onderzoeken, gebruikten de Amerikaan Ausubel en de Italiaan Marchetti de formule

$$K = log\left(\frac{R}{100 - R}\right)$$

Hierin is *R* het rendement in procenten.

Leg met behulp van de formule uit dat een toename van *R* zorgt voor een toename van *K*.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- Als R groter wordt, wordt 100 – *R* kleiner.
- Omdat de teller groter wordt en de noemer kleiner, wordt de breuk $\frac{R}{100 - R}$ groter.
- (Het grondtal van de logaritme is groter dan 1) dus $log\left(\frac{R}{100 - R}\right)$ neemt toe (dus *K* neemt toe).

10. Wiskunde B HAVO 2022, tijdvak 2, vraag 1 en 2

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 2 – vraag 1 en 2

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 3 + {}^2\log(x + 4)$.
De grafiek van f snijdt de x-as in het punt A.
Vraag 1: Bereken exact de x-coördinaat van A.

Het functievoorschrift $f(x) = 3 + {}^2\log(x + 4)$ is te herschrijven in de vorm $f(x) = {}^2\log(ax + b)$.
Vraag 2: Bereken exact de waarden van a en b.

Maximumscore 3 punten (vraag 1)

Maximumscore 2 punten (vraag 2)

Het juiste antwoord is:

Vraag 1

- $3 + {}^2\log(x + 4) = 0$ geeft ${}^2\log(x + 4) = -3$.
- Hieruit volgt $x + 4 = 2^{-3}$ (of $x + 4 = \frac{1}{8}$).
- De x-coördinaat van A is dus $x = -3\frac{7}{8}$.

Vraag 2

- $y = 3 + {}^2\log(x + 4)$ herschrijven als: $y = {}^2\log(2^3) + {}^2\log(x + 4)$
  (of $y = {}^2\log(8) + {}^2\log(x + 4)$).
- Dit is gelijk aan ($y = {}^2\log(8(x + 4))$, dus) $y = {}^2\log(8x + 32)$ (dus $a = 8$ en $b = 32$).

11. Wiskunde B HAVO 2022, tijdvak 1, vraag 3

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 1 – vraag 3

Data kan via verschillende kanalen verstuurd worden, bijvoorbeeld via een kabel of draadloos.
Bij het versturen van data is het belangrijk dat deze foutloos verstuurd wordt. Data kan foutloos verstuurd worden als de zogeheten **kanaalcapaciteit** groot genoeg is.
De kanaalcapaciteit is de maximale hoeveelheid data die per seconde over een kanaal overgedragen kan worden. Een formule waarmee de kanaalcapaciteit bepaald kan worden, is

$C = B \cdot {}^{2}\log(1 + R)$ (formule 1)

Hierin is
- C de kanaalcapaciteit in bits per seconde (bps);
- B de bandbreedte in hertz (Hz);
- R de signaal-ruisverhouding.

Deze signaal-ruisverhouding is de verhouding tussen de sterkte van het gewenste signaal en de sterkte van de aanwezige ruis. Met de formule

$S = 10 \cdot {}^{10}\log(R)$ (formule 2)

kan R omgerekend worden naar decibel (dB).

In 2016 had een goed werkende draadloos-internetverbinding vaak een bandbreedte van $20 \cdot 10^6$ Hz en een waarde van S van 40 dB.
Bereken met behulp van de bovenstaande formules de kanaalcapaciteit van deze verbinding.
Geef je eindantwoord in miljoenen bps.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- De vergelijking $10 \cdot {}^{10}\log(R) = 40$ moet worden opgelost.
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden.
- Dit geeft $R = 10\,000$.
- Dit geeft $C = 20 \cdot 10^6 \cdot {}^{2}\log(1 + 10\,000)$.
- Het gevraagde eindantwoord is 266 miljoen (bps).

12. Wiskunde B HAVO 2023, tijdvak 1, vraag 11

Oefenvraag examen 2023 tijdvak 1 – vraag 11

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2 \cdot 2^{x-3} - 4$

Het is mogelijk de grafiek van f door middel van transformaties te laten ontstaan uit de grafiek die hoort bij de formule $y = 2^x$. Dit kan op verschillende manieren. Er is een manier die alleen gebruikmaakt van translaties, dus **zonder** vermenigvuldigingen ten opzichte van x-as of y-as.

Bewijs dat er zo'n manier is. In je antwoord moeten de translaties worden genoemd.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- $f(x) = 2^1 \cdot 2^{x-3} - 4 = 2^{x-2} - 4$.
- Translatie 2 naar rechts.
- Translatie 4 omlaag.

Of

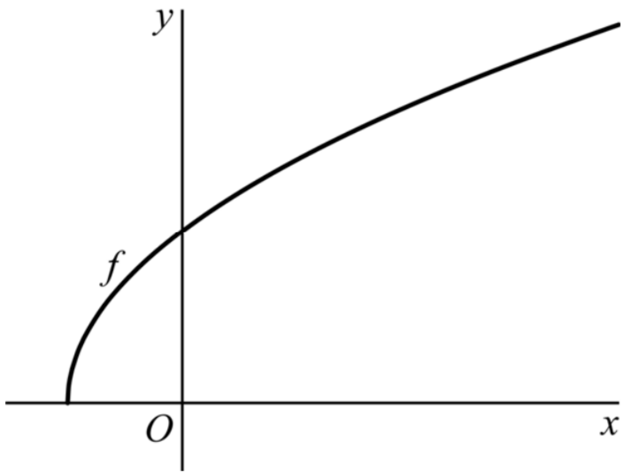
- Een translatie 3 naar rechts en een translatie 4 omlaag geeft $y = 2^{x-3} - 4$.
- Vervolgens een translatie 1 naar links geeft $y = 2^{x-3+1} - 4$.
- Dit is gelijk aan $y = 2 \cdot 2^{x-3} - 4 = f(x)$ (dus translatie 3 naar rechts, translatie 4 omlaag en translatie 1 naar links).

13. Wiskunde B HAVO 2022, tijdvak 2, vraag 5

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 2 – vraag 5

De functie f wordt gegeven door $f(x) = \sqrt{3x+4}$. In figuur 1 is de grafiek van f weergegeven.

Figuur 1



De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van $y = \sqrt{x}$ door een horizontale translatie en een vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as.

Geef aan welke translatie en vermenigvuldiging dit zijn en in welke volgorde ze moeten worden toegepast.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- (Horizontale) translatie '4 naar links' (of een horizontale translatie van –4).
- Vermenigvuldiging (ten opzichte van de y-as) met $\frac{1}{3}$.
- De volgorde waarin deze transformaties moeten worden toegepast, is: eerst de translatie, daarna de vermenigvuldiging.

Of

- Er geldt $f(x) = \sqrt{3(x+\frac{4}{3})}$; vermenigvuldiging (ten opzichte van de y-as) met $\frac{1}{3}$.
- (Horizontale) translatie ' $\frac{4}{3}$ naar links' (of een horizontale translatie van $-\frac{4}{3}$).
- De volgorde waarin deze transformaties moeten worden toegepast, is: eerst de vermenigvuldiging, daarna de translatie.

14. Wiskunde B HAVO 2019, tijdvak 1, vraag 10

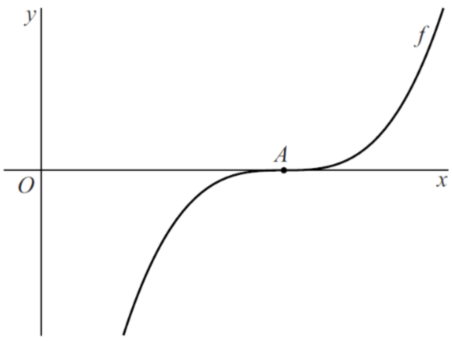
Oefenvraag examen 2019 tijdvak 1 – vraag 10

De functie f is gegeven door $f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^3$. Zie figuur 1.

De functie g is gegeven door $g(x) = x^3$. De grafiek van f ontstaat uit de grafiek van g door twee transformaties na elkaar toe te passen.

Geef aan welke twee transformaties dit kunnen zijn **en** in welke volgorde ze moeten worden toegepast.

figuur 1



Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- De transformaties kunnen zijn: de translatie 'twee naar rechts' en de vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met
- De volgorde waarin deze transformaties moeten worden toegepast, is: eerst de translatie en daarna de vermenigvuldiging

2.2 Vergelijkingen en ongelijkheden

15. Wiskunde B HAVO 2024, tijdvak 2, vraag 9

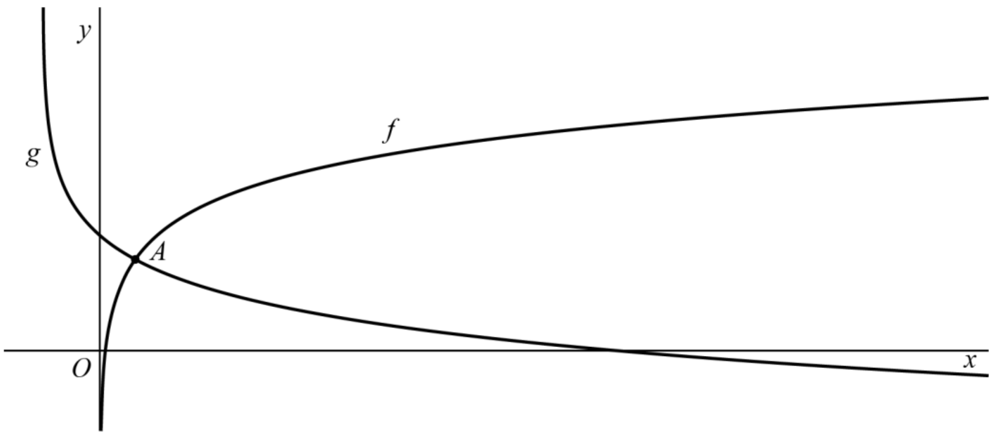
Oefenvraag examen 2024 tijdvak 2 – vraag 9

Voor $x > 0$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = \log(x)$.

Voor $x > -10$ wordt de functie g gegeven door $g(x) = 2 - \log(x + 10)$.

De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt A. Zie figuur 1.

Figuur 1



Bereken exact de oplossing van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$.

Maximumscore 6 punten

Het juiste antwoord is:

- Uit $\log(x) = 2 - \log(x + 10)$ volgt $\log(x(x + 10)) = 2)$ (of $\log(x) = \log(10^2) - \log(x + 10) = \log(\frac{100}{x+10}))$
- Dit geeft $x(x + 10) = 100$
- Hieruit volgt $x^2 + 10x - 100 = 0$
- De discriminant van deze vergelijking is $D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot -100 = 500$
- Dit geeft $x = -5 + \frac{1}{2}\sqrt{500}$ ($x = -5 - \frac{1}{2}\sqrt{500}$ voldoet niet)
  (dus de x-coördinaat van punt A is gelijk aan $-5 + \frac{1}{2}\sqrt{500}$)
- Het eindantwoord $0 < x < -5 + \frac{1}{2}\sqrt{500}$

16. Wiskunde B HAVO 2023, tijdvak 1, vraag 12

Oefenvraag examen 2023 tijdvak 1 – vraag 12

De functie *f* wordt gegeven door $f(x) = 2 \cdot 2^{x-3} - 4$

Op de grafiek van *f* ligt een punt met *y*-coördinaat 10.
Bereken exact de *x*-coördinaat van dit punt.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- Uit $2 \cdot 2^{x-3} - 4 = 10$ volgt $2 \cdot 2^{x-3} = 14$.
- Dus $2^{x-3} = 7$.
- Hieruit volgt $x - 3 = {}^{2}\log(7)$.
- Dus $x = {}^{2}\log(7) + 3$.

Of

- Uit $2 \cdot 2^{x-3} - 4 = 10$ volgt $2 \cdot 2^{x-3} = 14$.
- Dus $2^{x-2} = 14$.
- Hieruit volgt $x - 2 = {}^{2}\log(14)$.
- Dus $x = {}^{2}\log(14) + 2$.

Of

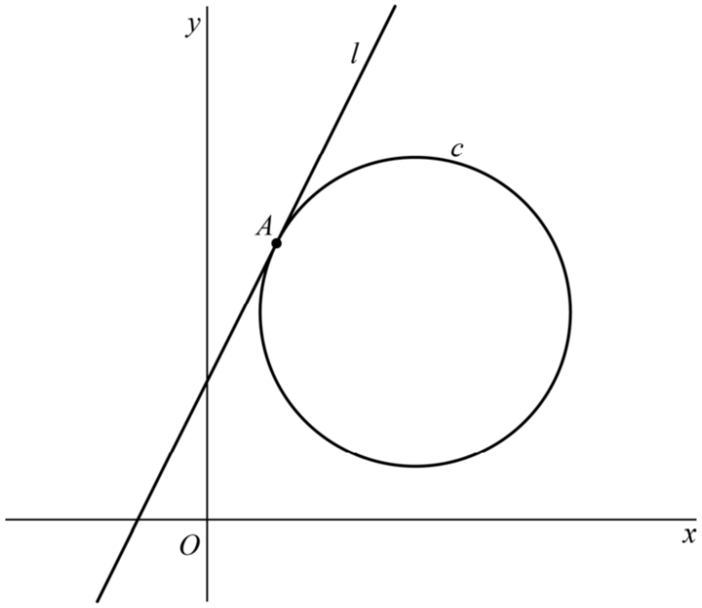
- Uit $2 \cdot 2^{x-3} - 4 = 10$ volgt $2 \cdot 2^{x-3} = 14$.
- Dit geeft $2 \cdot 2^{x} \cdot 2^{-3} = 14$, dus $\frac{1}{4} \cdot 2^{x} = 14$.
- Hieruit volgt $2^{x} = 56$.
- Dus $x = {}^{2}\log(56)$.

17. Wiskunde B HAVO 2022, tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 1 – vraag 1

De cirkel c is gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 = 6x + 6y - 13$.
De lijn l met vergelijking $y = 2x + 2$ raakt de cirkel in het punt A. Zie figuur 1.

Figuur 1



Bereken exact de coördinaten van A.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- $y = 2x + 2$ substitueren in $x^2 + y^2 = 6x + 6y - 13$ geeft
  $x^2 + (2x + 2)^2 = 6x + 6(2x + 2) - 13$.
- Hieruit volgt $5x^2 - 10x + 5 = 0$ (of $x^2 - 2x + 1 = 0$).
- (Uit $x^2 - 2x + 1 = 0$ volgt) $(x - 1)^2 = 0$ (of het gebruik van de abc-formule).
- Dus $x = 1$ en $y = 4$ (dus $A(1, 4)$).

Of

- (Uit kwadraat afsplitsen volgt) het middelpunt van de cirkel is $M(3, 3)$.
- De lijn door M loodrecht op l heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.
- Beschrijven hoe de vergelijking $2x + 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ exact opgelost kan worden.
- Hieruit volgt $A(1, 4)$.

Of

- (Uit kwadraat afsplitsen volgt) het middelpunt van de cirkel is $M(3, 3)$.
- $A(a, 2a + 2)$ geeft $rc_{AM} = \frac{3-(2a+2)}{3-a}$ en dit moet gelijk zijn aan $-\frac{1}{2}$.
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{1-2a}{3-a} = -\frac{1}{2}$ exact opgelost kan worden.
- Hieruit volgt ($a = 1$ dus) $A(1, 4)$.

18. Wiskunde B HAVO 2018, tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag examen 2018 tijdvak 1 – vraag 1

De functie f is gegeven door $f(x) = 4 - 2^{0,3x-2}$.
Op de grafiek van f ligt een punt R. De y-coördinaat van R is 2.
Bereken exact de x-coördinaat van R.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- $4 - 2^{0,3x-2} = 2$ geeft $2^{0,3x-2} = 2$.
- Hieruit volgt $0,3x - 2 = 1$.
- Hieruit volgt $0,3x = 3$ en dus $x = 10$.

19. Wiskunde B HAVO 2018, tijdvak 2, vraag 14

Oefenvraag examen 2018 tijdvak 2 – vraag 14

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ zijn de functies f en g gegeven door:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{en} \quad g(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$$

Op het gegeven domein hebben de grafieken van f en g één snijpunt.
Bereken exact de x-coördinaat van dit snijpunt.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- De vergelijking $x + \frac{1}{x} = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$ moet worden opgelost.
- Hieruit volgt $\frac{3}{4}x = \frac{3}{x}$ (of bijvoorbeeld $\frac{x}{4} = \frac{1}{x}$).
- Dit geeft $x^2 = 4$.
- Dit geeft (met domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$) $x = 2$.

20. Wiskunde B HAVO 2014, tijdvak 1, vraag 18

Oefenvraag examen 2014 tijdvak 1 – vraag 18

De functies f en g zijn gegeven door en $f(x) = x\sqrt{x+2}$ en $g(x) = x^2$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in de punten A en B.
Bereken exact de x-coördinaten van A en B.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- Uit $x^2 = x\sqrt{x+2}$ volgt $x = 0$ of $x = \sqrt{x+2}$.
- $x = \sqrt{x+2}$ geeft $x^2 = x + 2$ (met $x \geq 0$).
- Beschrijf hoe $x^2 = x + 2$ (met ≥ 0) exact opgelost kan worden.
- De x-coördinaten van A en B zijn) $x = 0$ en $x = 2$.

Of

- Uit $x^2 = x\sqrt{x+2}$ volgt $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$ (met $x \geq 0$).
- Hieruit volgt $x = 0$ of $x^2 - x - 2 = 0$ (met $x \geq 0$).
- Beschrijf hoe $x^2 - x - 2 = 0$ (met $x \geq 0$) exact opgelost kan worden.
- De x-coördinaten van A en B zijn) $x = 0$ en $x = 2$.

2.3 Evenredigheidsverbanden

21. Wiskunde B HAVO (pilot) 2015, tijdvak 1, vraag 10

Oefenvraag pilot examen 2015 tijdvak 1 – vraag 10

Op de foto is een bolvormige geluidsbox te zien. We gaan ervan uit dat deze geluidsbox in alle richtingen evenveel geluid produceert. Hierbij neemt de zogeheten geluidsintensiteit af naarmate men verder van het middelpunt van de geluidsbox verwijderd is. In deze opgave gaan we uit van een geluidsbox die in een open ruimte staat. Voor de geluidsintensiteit I in watt per m^2 geldt de volgende formule:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Hierin is r de afstand in meter tot het middelpunt van de geluidsbox en P is het vermogen van het door de geluidsbox geproduceerde geluid in watt.
Op 5 meter van het middelpunt van de geluidsbox wordt een geluidsintensiteit van 10^{-7} watt per m^2 gemeten.

Bereken de geluidsintensiteit op 1 meter van het middelpunt van de geluidsbox.

foto

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- De vergelijking $10^{-7} = \frac{P}{4\pi \cdot 5^2}$ moet worden opgelost.
- De oplossing is $P = \pi \cdot 10^{-5}$ ($P \approx$ of $3{,}14 \cdot 10^{-5}$).
- Dus op 1 meter afstand geldt $I = \frac{\pi \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 1^2}$ (of $I \approx \frac{3{,}14 \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 1^2}$).
- De gevraagde geluidsintensiteit is $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ (watt per m^2) (of een vergelijkbare vorm).

Of:

- De intensiteit I is omgekeerd evenredig met r^2.
- Dus $\frac{I}{10^{-7}} = \frac{5^2}{1^2}$ (of: de intensiteit op 1 meter afstand is dus 25 keer zo groot als op 5 meter afstand).
- De gevraagde geluidsintensiteit is $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ (watt per m^2) (of een vergelijkbare vorm).

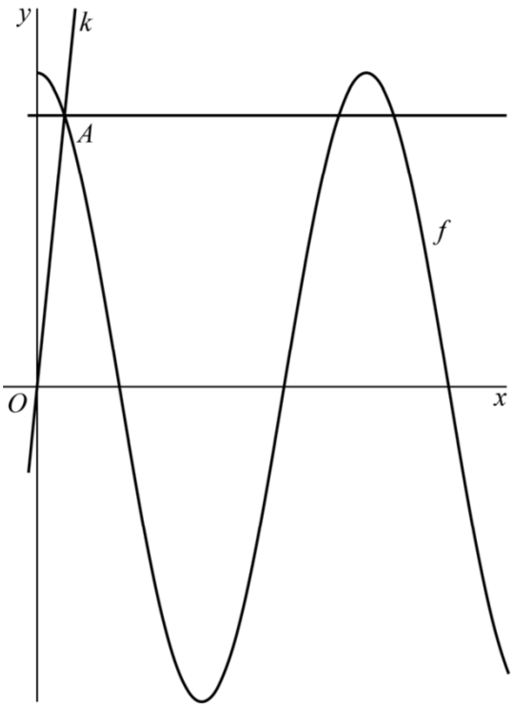
2.4 Periodieke functies

22. Wiskunde B HAVO 2022, tijdvak 3, vraag 10

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 3 – vraag 10

Op het domein [0, 3] is de functie f gegeven door $f(x) = 2\cos(3x)$.
Het punt A is het meest links gelegen snijpunt van de grafiek van f en de lijn met vergelijking $y = \sqrt{3}$.
Lijn k gaat door O en A. Zie figuur 1.

Figuur 1



De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{18\sqrt{3}}{\pi}$.
Bewijs dit.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- De vergelijking $2\cos(3x) = \sqrt{3}$ moet worden opgelost.
- Dit geeft $\cos(3x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ waaruit volgt $3x = \frac{1}{6}\pi\ (+\ k \cdot 2\pi)$ (of $3x = -\frac{1}{6}\pi\ (+\ k \cdot 2\pi)$).
- Dus voor de x-coördinaat van A geldt $x = \frac{1}{18}\pi$.
- De richtingscoëfficiënt van k is $\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{18}\pi} = \frac{18\sqrt{3}}{\pi}$.

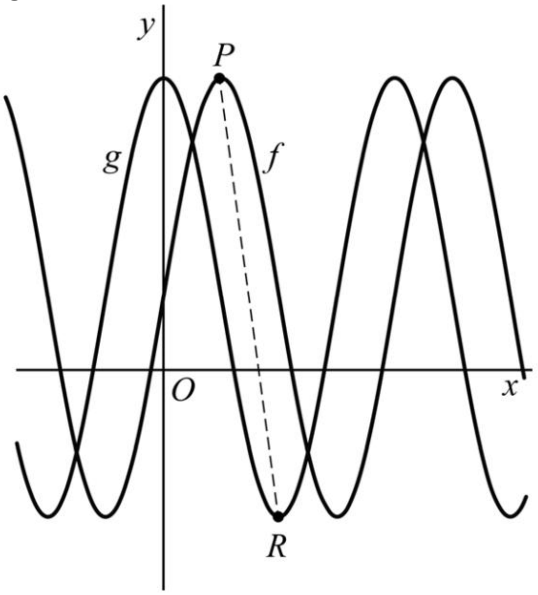
23. Wiskunde B HAVO 2022, tijdvak 2, vraag 7

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 2 – vraag 7

De functies *f* en *g* worden gegeven door:
$f(x) = 1 + 3\sin(2x)$
$g(x) = 1 + 3\cos(2x)$

Het punt *P* is de eerste top van de grafiek van *f* rechts van de *y*-as en het punt *R* is de eerste top van de grafiek van *g* rechts van de *y*-as. Zie figuur 1, waarin ook het lijnstuk *PR* getekend is.

Figuur 1



Bereken algebraïsch de lengte van lijnstuk *PR*. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- De periode van *f* en *g* is ($\frac{2\pi}{2}$ =) π.
- Het maximum van *f* vindt plaats na een kwart periode, dus bij $x = \frac{1}{4}$π; dit geeft $f(\frac{1}{4}\pi)$ = 4 (of bijbehorende *y*-waarde: 1 + 3 = 4).
- Het minimum van *g* vindt plaats na een halve periode, dus bij $x = \frac{1}{2}$π; dit geeft $g(\frac{1}{2}\pi)$ = –2 (of bijbehorende *y*-waarde: 1 – 3 = –2).
- De lengte van *PR* is dan $\sqrt{(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi)^2 + (4 - -2)^2}$ (= 6,051...) dus het eindantwoord is: 6,05.

Of

- Voor de maxima van *f* geldt: sin(2*x*) = 1 en voor de minima van *g* geldt: cos(2*x*) = –1.
- Voor *P* geldt: $x = \frac{1}{4}\pi$ en $y = 4$.
- Voor R geldt: $x = \frac{1}{2}\pi$ en $y = -2$.
- De lengte van *PR* is dan $\sqrt{(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi)^2 + (4 - -2)^2}$ (= 6,051...) dus het eindantwoord is: 6,05.

Of

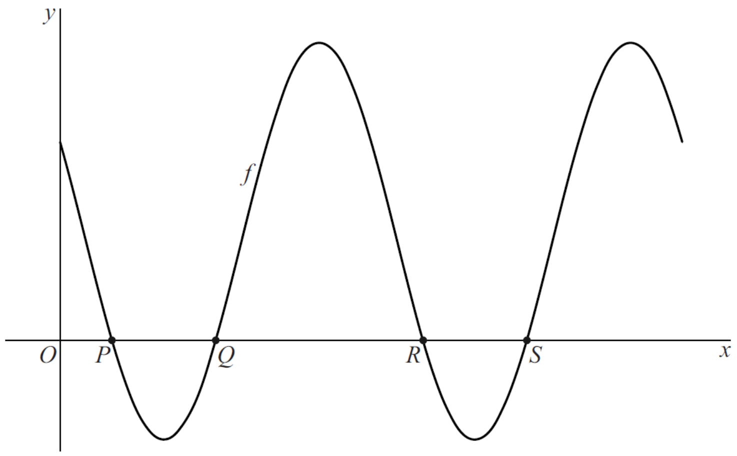
- Voor $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ geldt voor de eerste toppen rechts van de *y*-as: $\Delta x = \frac{1}{2}\pi$.
- Door de vermenigvuldiging ten opzichte van de *y*-as met $\frac{1}{2}$ van $y = \sin(x)$ en $y = \cos(x)$ geldt hier dat $\Delta x = \frac{1}{4}\pi$.
- Voor de maxima van *f* geldt: $y = 4$ en voor de minima van *g* geldt: $y = -2$ dus $\Delta y = 6$.
- De lengte van *PR* is dan $\sqrt{(\frac{1}{4}\pi)^2 + 6^2}$ (= 6,051...) dus het eindantwoord is: 6,05.

24. Wiskunde B HAVO 2019, tijdvak 1, vraag 13

Oefenvraag examen 2019 tijdvak 1 – vraag 13

Op het domein $[0, 2\pi]$ is de functie *f* gegeven door: $f(x) = 1 + 2\cos(2x + \frac{1}{3}\pi)$
De grafiek van *f* snijdt de *x*-as achtereenvolgens in de punten *P*, *Q*, *R* en *S*. Zie de figuur.

figuur



De afstand *PS* is *a* keer zo groot als de afstand *QR*.
Bereken de waarde van *a*.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

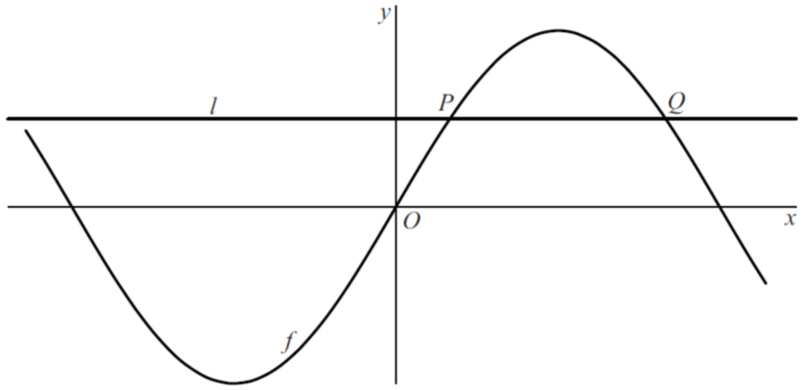
- Beschrijven hoe de vergelijking $1 + 2\cos(2x + \frac{1}{3}\pi) = 0$ opgelost kan worden.
- Dit geeft voor *x* de oplossing $\frac{1}{6}\pi$ (of 0,05...) (of één andere oplossing).
- En de (andere) oplossingen $\frac{1}{2}\pi$, $1\frac{1}{6}\pi$ en $1\frac{1}{2}\pi$ (of 1,5..., 3,6... en 4,7...).
- Dus $PS = 1\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi$ en $QR = 1\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\pi$ (of PS = 4,7... – 0,5... = 4,1... en QR = 3,6... – 1,5... = 2,0...).
- Dus de gevraagde waarde van *a* is $\frac{1\frac{1}{3}\pi}{\frac{2}{3}\pi}$ = (of $\frac{4{,}1\ldots}{2{,}0\ldots}$ =)) 2.

25. Wiskunde B HAVO 2018, tijdvak 2, vraag 11

Oefenvraag examen 2018 tijdvak 2 – vraag 11

Op het domein $\left[-\frac{8}{7}, \frac{8}{7}\right]$ wordt de functie f gegeven door $f(x) = 3\sin(\pi x)$.
De lijn l is de lijn met vergelijking $y = \frac{3}{2}$.
Lijn l snijdt de grafiek van f in de punten P en Q. Zie figuur 1.

figuur 1



Bereken exact de x-coördinaten van P en Q.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- Uit de vergelijking $3\sin(\pi x) = \frac{3}{2}$ volgt $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$.
- $\pi x = \frac{1}{6}\pi$ of $\pi x = \frac{5}{6}\pi$ (of: $\pi x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of $\pi x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$).
- De x-coördinaat van P is $x = \frac{1}{6}$ en de x-coördinaat van Q is $x = \frac{5}{6}$.

26. Wiskunde B HAVO 2017, tijdvak 2, vraag 10

Oefenvraag examen 2017 tijdvak 2 – vraag 10

Op het domein [0,2] is de functie f gegeven door: $f(x) = 1 - 2\sin(\pi x)$.

Bereken exact de nulpunten van f.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- Uit $1 - 2\sin(\pi x) = 0$ volgt $\sin(\pi x) = \frac{1}{2}$.
- Dit geeft $\pi x = \frac{1}{6}\pi$ $(+\ k \cdot 2\pi)$ en $\pi x = \frac{5}{6}\pi$ $(+\ k \cdot 2\pi)$.
- (Op het gegeven domein geeft dit de nulpunten) $x = \frac{1}{6}$ en $x = \frac{5}{6}$.

3. Meetkundige berekeningen

3.1 Afstanden en hoeken in concrete situaties

27. Wiskunde B HAVO 2023, tijdvak 1, vraag 10

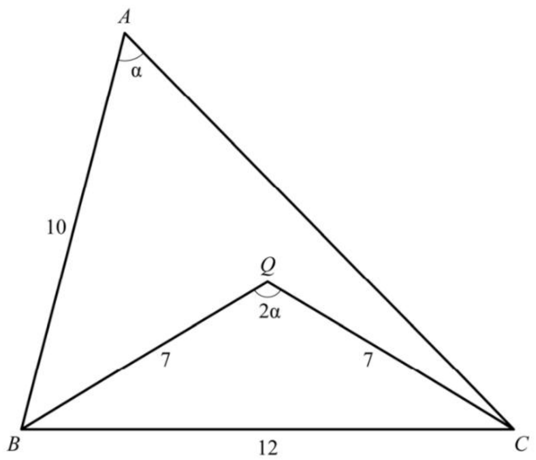
Oefenvraag examen 2023 tijdvak 1 – vraag 10

Gegeven zijn de driehoeken ABC en BCQ met $AB = 10$, $BC = 12$, $BQ = CQ$ en $\angle BAC = \alpha$.
Bovendien is gegeven $\angle BQC = 2\alpha$.

Zie de figuur.

Bereken AC.
Geef je eindantwoord in twee decimalen.

figuur



Maximumscore 6 punten

Het juiste antwoord is:

- De cosinusregel in driehoek BCQ geeft $12^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos(2\alpha)$.
- Hieruit volgt $\cos(2\alpha) = -0{,}46...$.
- Dit geeft $2\alpha = 117{,}99...°$, dus $\alpha = \angle BAC = 58{,}99...°$.
- De cosinusregel in driehoek ABC geeft
  $12^2 = 10^2 + AC^2 - 2 \cdot 10 \cdot AC \cdot \cos(58{,}99\ ...\ °)$.
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost.
- (Dit geeft $AC = 13{,}549...$, dus) het eindantwoord is 13,55.

Of

- De cosinusregel in driehoek BCQ geeft $12^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos(2\alpha)$.
- Hieruit volgt $\cos(2\alpha) = -0{,}46...$.
- Dit geeft $2\alpha = 117{,}99...°$, dus $\alpha = \angle BAC = 58{,}99...°$.
- De sinusregel in driehoek ABC geeft $\frac{12}{\sin(58{,}99...°)} = \frac{10}{\sin(\angle BCA)}$; dit
  geeft $\angle BCA = 45{,}58...°$.
- $\angle ABC = 180 - 58{,}99... - 45{,}58... = 75{,}41...°$.
- De sinusregel in driehoek ABC geeft

$\frac{12}{\sin(58{,}99...°)} = \frac{AC}{\sin(75{,}41...°)}$ (of gebruikmaken van de cosinusregel in driehoek *ABC*); (dit geeft *AC* = 13,549..., dus) het eindantwoord is 13,55.

Of

- De cosinusregel in driehoek *BCQ* geeft $12^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cos(2\alpha)$.
- Hieruit volgt $\cos(2\alpha) = -0{,}46...$.
- Dit geeft $2\alpha = 117{,}99...°$, dus $\alpha = \angle BAC = 58{,}99...°$.
- In driehoek *ABD*, waarin *D* de loodrechte projectie van *B* op zijde *AC* is, geldt $\sin(58{,}99\,...°) = \frac{BD}{10}$; dit geeft *BD* = 8,57... .
- De stelling van Pythagoras geeft $CD = \sqrt{12^2 - 8.57\,...^2}$ en $AD = \sqrt{10^2 - 8.57\,...^2}$.
- *AC* = *CD* + *AD* = 8,39... + 5,15... (= 13,549...), dus het eindantwoord is 13,55.

Of

- Het inzicht dat driehoek *BMQ* een rechthoekige driehoek is met zijden *BM* = 6 en *BQ* = 7 , waarbij *M* het midden is van zijde *BC*.
- Dus geldt $\sin(\angle BQM) = \frac{6}{7}$.
- Dit geeft $\angle BQM = 58{,}99...°$, dus ook $\angle BAC = 58{,}99...°$.
- De cosinusregel in driehoek *ABC* geeft
  $12^2 = 10^2 + AC^2 - 2 \cdot 10 \cdot AC \cdot \cos(58{,}99\,...°)$.
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost.
- (Dit geeft *AC* =13,549..., dus) het eindantwoord is 13,55.

Of

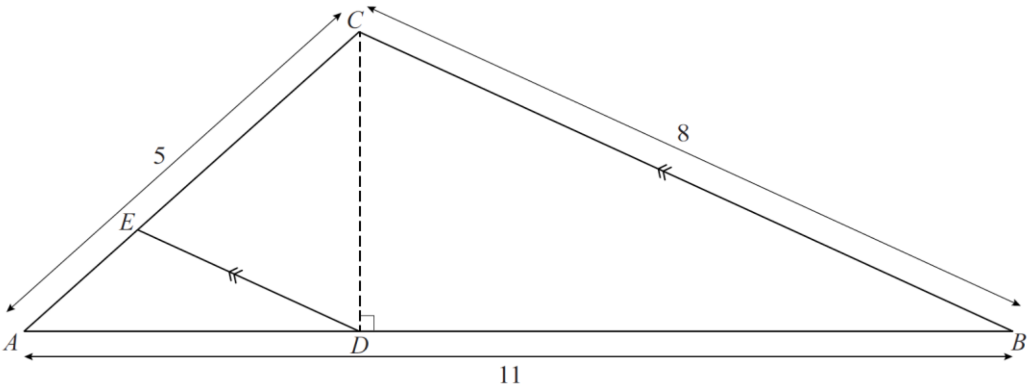
- (Omdat driehoek *BCQ* gelijkbenig is, volgt:) als *M* het midden van lijnstuk *BC* is, dan geldt $\angle BMQ = 90°$ en $\angle BQM = \frac{1}{2} \cdot \angle BQC = \alpha = \angle BAC$.
- Hieruit volgt dat driehoek *BMQ* gelijkvormig is met driehoek *BDA* met vergrotingsfactor $\frac{10}{7}$, waarbij *D* de loodrechte projectie van *B* op zijde *AC* is.
- *BM* = 6 , dus met de stelling van Pythagoras volgt hieruit dat
  $QM = \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{13}$.
- $AD = \frac{10}{7}\sqrt{13}$ (= 5,15...) en $BD = \frac{10}{7} \cdot 6$ (=8,57...).
- $CD = \sqrt{12^2 - 8{,}57\,...^2} = 8{,}39...$.
- *AC* = *CD* + *AD* = 8,39... + 5,15... (= 13,549...), dus het eindantwoord is 13,55.

28. Wiskunde B HAVO 2019, tijdvak 2, vraag 3

Oefenvraag examen 2019 tijdvak 2 – vraag 3

Gegeven is driehoek *ABC* met *AB* =11, *BC* = 8 en *AC* = 5.
Het punt *D* ligt op zijde *AB*, zo dat lijnstuk *CD* loodrecht op zijde *AB* staat.
Het punt *E* ligt op zijde *AC*, zo dat lijnstuk *DE* evenwijdig is met zijde *BC*. Zie de figuur.

figuur



Bereken algebraïsch de lengte van lijnstuk *DE*. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Maximumscore 6 punten

Het juiste antwoord is:

- Er geldt $8^2 = 5^2 + 11^2 - 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot \cos(\angle A)$
- Hieruit volgt $\cos(\angle A) = \frac{8^2 - 5^2 - 11^2}{-2 \cdot 5 \cdot 11}$ (= 0,745...) (dus $\angle A$ = 41,801...°
- Er geldt $\cos(\angle A) = \frac{AD}{5}$
- Hieruit volgt $AD + 5 \cdot 0{,}745... = 3{,}727...$
- Driehoek *ADE* is gelijkvormig met driehoek *ABC* (wegens F-hoeken)
- $DE = \frac{3{,}727...}{11} \cdot 8 \approx 2{,}71$

Of:

- Stel $AD = x$, dan geldt $CD^2 = 5^2 - x^2$
- Ook geldt $CD^2 = 8^2 - (11 - x)^2$
- Er geldt dus $5^2 - x^2 = 8^2 - (11 - x)^2$, dus $25 - x^2 = 64 - (121 - 22x + x^2)$
- Hieruit volgt $82 = 22x$, dus (AD =) $x = \frac{41}{11}$
- Driehoek *ADE* is gelijkvormig met driehoek *ABC* (wegens F-hoeken)
- $DE = \frac{\frac{41}{11}}{11} \cdot 8 \approx 2{,}71$

Of:

- (Uit de cosinusregel volgt) $5^2 = 11^2 + 8^2 - 2 \cdot 11 \cdot 8 \cdot \cos(\angle B)$, dit geeft $\cos(\angle B) = \frac{5^2 - 11^2 - 8^2}{-2 \cdot 11 \cdot 8}$, waaruit volgt $\angle B = 24{,}619...°$
- $CD = 8 \cdot \sin(\angle B) = 3{,}332...$
- $AD = \sqrt{5^2 - CD^2} = 3{,}727...$
- $\sin(\angle A) = \frac{DC}{AC} = 0{,}666...$ geeft $\angle A = 41{,}801...°$
- $\angle ADE = \angle B$ (wegens F-hoeken);
  $\angle AED = 180 - 41{,}801... - 24{,}619... = 113{,}578...°$
- (Uit de sinusregel volgt) $\frac{DE}{\sin(\angle A)} = \frac{AD}{\sin(\angle AED)}$ en dit geeft $DE \approx 2{,}71$

3.2 Algebraïsche methoden

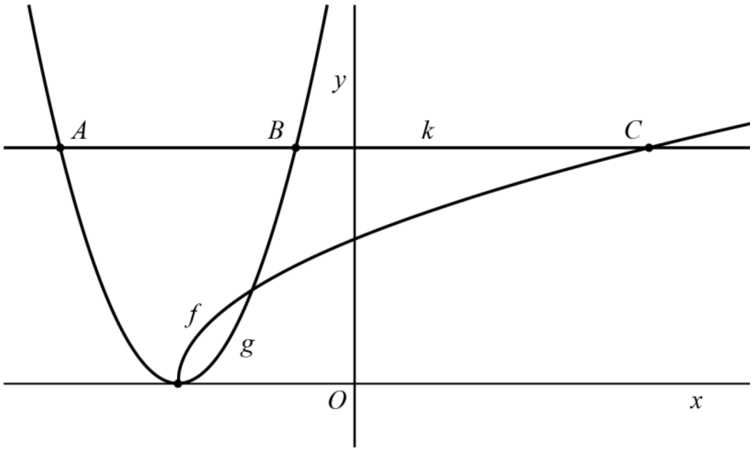
29. Wiskunde B HAVO 2024, tijdvak 2, vraag 3

Oefenvraag examen 2024 tijdvak 2 – vraag 3

De functies *f* en *g* worden gegeven door $f(x) = \sqrt{2x+6}$ en $g(x) = x^2 + 6x + 9$.

De lijn *k* met vergelijking $y = 4$ snijdt de grafiek van *g* in de punten *A* en *B*, waarbij *B* rechts ligt van *A*. De lijn *k* snijdt de grafiek van *f* in het punt *C*. Zie de figuur.

Figuur



De lijn *l* raakt de grafiek van *f* in het punt met *x*-coördinaat 15.
De lijn *m* met vergelijking $6x + 7 = -27$ raakt de grafiek van *g*.
Bewijs dat *l* en *m* loodrecht op elkaar staan.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

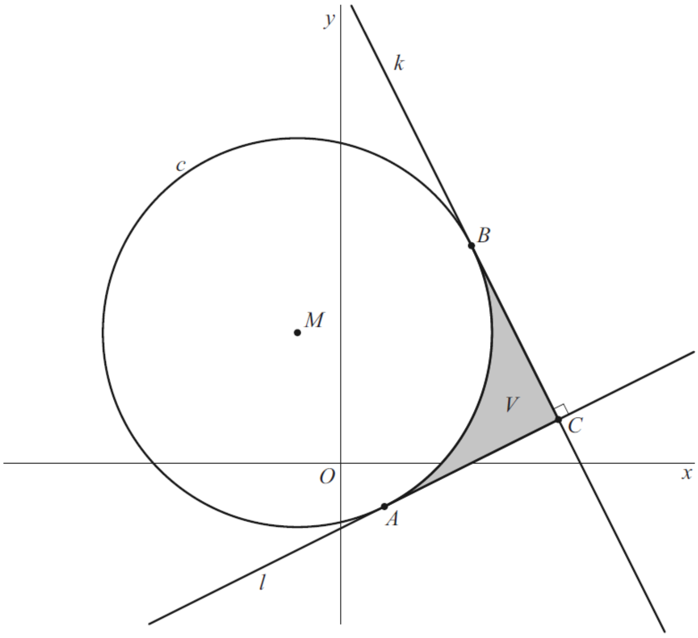
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+6}} \cdot 2$
- $f'(15) = \frac{1}{6}$
- (De vergelijking van *m* kan worden herleid tot $y = -6x - 27$, dus) de richtingscoëfficiënt van *m* is -6.
- $rc_l \cdot rc_m = \frac{1}{6} \cdot -6 = -1$ (dus *l* en *m* staan loodrecht op elkaar).

30. Wiskunde B HAVO 2019, tijdvak 1, vraag 18

Oefenvraag examen 2019 tijdvak 1 – vraag 18

Cirkel c met middelpunt $M(-1, 3)$ raakt lijn l met vergelijking $y = \frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}$ in punt A.
Lijn k staat loodrecht op l en raakt c in punt B. Punt C is het snijpunt van k en l.
Lijnstukken AC en BC en cirkelboog AB sluiten het vlak V in. Zie de figuur, waarin vlak V grijs is weergegeven.

figuur



Bereken algebraïsch de omtrek van V. Geef je eindantwoord in twee decimalen.

Maximumscore 8 punten

Het juiste antwoord is:

- AM heeft richtingscoëfficiënt $\frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$ (dus de lijn door A en M heeft vergelijking $y = -2x + b$)
- Invullen van de coördinaten van $M(-1, 3)$ in $y = -2x + b$ geeft $b = 1$
- l snijden met $y = -2x + 1$ geeft $x_A = 1$
- $y_A = -2 \cdot 1 + 1 = -1$
- De straal r van c is dus $\sqrt{(-1-1)^2 + (3 - -1)^2} = \sqrt{20}$
- ($MA \perp l$ en $MB \perp k$ dus $MACB$ is een vierkant,) dus $AC = BC = \sqrt{20}$
- De omtrek van c is $2\pi \cdot \sqrt{20}$
- Dus de gevraagde omtrek van vlak V is ($2 \cdot \sqrt{20} + \frac{1}{4} \cdot 2\pi\sqrt{20} \approx$) 15,97

31. Wiskunde B HAVO (pilot) 2016, tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag pilot examen 2016 tijdvak 1 – vraag 1

Gegeven is cirkel c met middelpunt $M(0,5; 0,5)$ die door het punt $A(0, 4)$ gaat.
Stel een vergelijking op van c.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- De straal r van c is $\sqrt{(0-0{,}5)^2+(4-0{,}5)^2}$.
- Hieruit volgt $r = \sqrt{\frac{25}{2}}$ (of $r^2 = \frac{25}{2}$) (of een gelijkwaardige uitdrukking).
- Een vergelijking van c is $(x - 0{,}5)^2 + (y - 0{,}5)^2 = \frac{25}{2}$.

Of:

- Een vergelijking van c is $(x - 0{,}5)^2 + (y - 0{,}5)^2 = r^2$.
- Invullen van de coördinaten van A geeft $\frac{1}{4} + \frac{49}{4} = r^2$.
- Dus een vergelijking van c is $(x - 0{,}5)^2 + (y - 0{,}5)^2 = \frac{25}{2}$.

32. Wiskunde B HAVO 2023, tijdvak 1, vraag 3

Oefenvraag examen 2023 tijdvak 1 – vraag 3

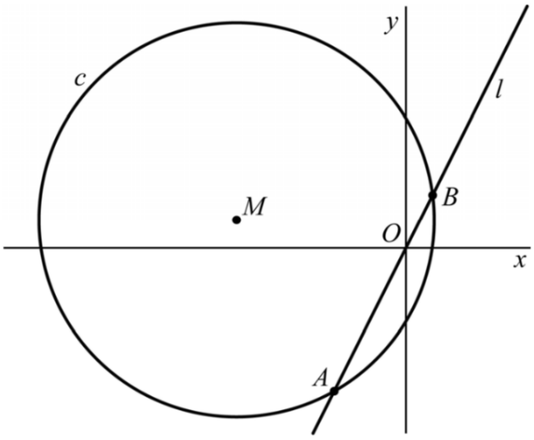
De cirkel c met middelpunt M is gegeven door
$(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 49$.

Ook is gegeven de lijn l met vergelijking $y = 2x$.

De cirkel en de lijn snijden elkaar in de punten A en B.
Punt A ligt onder de x-as, punt B ligt boven de x-as.
Zie figuur 1.

Bereken algebraïsch de x-coördinaat van B.
Geef je eindantwoord in twee decimalen.

figuur 1



Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

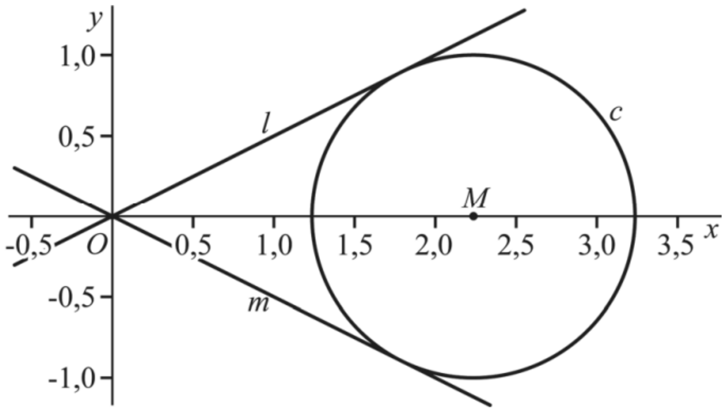
- Voor de x-coördinaat van B geldt $(x + 6)^2 + (2x - 1)^2 = 49$.
- Herleiden tot $5x^2 + 8x - 12 = 0$.
- De discriminant van deze vergelijking is $8^2 - 4 \cdot 5 \cdot -12 = 304$.
- Voor de x-coördinaat van B geldt $x = \frac{-8 + \sqrt{304}}{10}$ (0,943...), dus de gevraagde x-coördinaat is 0,94.

33. Wiskunde B HAVO 2023, tijdvak 2, vraag 5

Oefenvraag examen 2023 tijdvak 2 – vraag 5

De lijn l is gegeven door de vergelijking $y = \frac{1}{2}x$ en de lijn m door de vergelijking $y = -\frac{1}{2}x$.
Verder is gegeven de cirkel c met middelpunt $M(\sqrt{5}, 0)$ en straal 1.
Lijn l raakt cirkel c. Zie figuur 1.

Figuur 1



Bewijs dat lijn l cirkel c raakt.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- Een cirkelvergelijking van c is $(x - \sqrt{5})^2 + y^2 = 1$.
- $y = \frac{1}{2}x$ hierin invullen geeft $(x - \sqrt{5})^2 + (\frac{1}{2}x)^2 = 1$.
- Herschrijven tot $\frac{5}{4}x^2 - 2\sqrt{5} \cdot x + 4 = 0$ (of een vergelijkbare vorm).
- De discriminant van deze vergelijking is $D = \left(-2\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot 4$.
- $D = 0$ (dus de vergelijking heeft één oplossing, dus l raakt c).

Of

- De lijn door M loodrecht op l heeft vergelijking $y = -2x + b$.
- M hierin invullen geeft $0 = -2 \cdot \sqrt{5} + b$, dus $b = 2\sqrt{5}$ (dus $y = -2x + 2\sqrt{5}$).
- Voor de x-coördinaat van het snijpunt van l en de loodlijn op l door M geldt $\frac{1}{2}x = -2x + 2\sqrt{5}$ en dit geeft $x = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.
- Dus het snijpunt is $\left(\frac{4}{5}\sqrt{5}, \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$.
- $\left(\frac{4}{5}\sqrt{5} - \sqrt{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)^2 = 1$ (dus het snijpunt ligt op c, dus l raakt c).

34. Wiskunde B HAVO 2021, tijdvak 1, vraag 4

Oefenvraag examen 2021 tijdvak 1 – vraag 4

De cirkel c_1 wordt gegeven door: $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$

De lijn k wordt gegeven door: $y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$

Lijn k raakt cirkel c_1.

Bewijs dit.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- ($y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ invullen in $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$ geeft voor de snijpunten van c_1 en k) $x^2 - 4x + (\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}) = -8$.
- $1\frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4} = 0$ (of een gelijkwaardige vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$).
- $D = (-2\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{4} = 0$, dus k raakt cirkel c_1.

Of:

- ($y = \frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$ invullen in $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -8$ geeft voor de snijpunten van c_1 en k) $x^2 - 4x + (\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2})^2 - 6(\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}) = -8$.
- $1\frac{1}{4}x^2 - 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4} = 0$ (of een gelijkwaardige vergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$).
- Exact oplossen geeft (één oplossing, namelijk) $x = 1$, dus k raakt cirkel c_1.

35. Wiskunde B HAVO 2018, tijdvak 1, vraag 4

Oefenvraag examen 2018 tijdvak 1 – vraag 4

De lijn l is gegeven door de vergelijking $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$.
Verder is gegeven het punt $P(6,1)$.

De afstand tussen l en P is 5. Bewijs dit.

Maximumscore 6 punten

Het juiste antwoord is:

- De richtingscoëfficiënt van de lijn m loodrecht op l door P is ($\frac{-1}{\frac{3}{4}}$ =) $-\frac{4}{3}$ (dus m heeft een vergelijking van de vorm $y = -\frac{4}{3}x + b$).
- Invullen van de coördinaten van P in $y = -\frac{4}{3}x + b$ geeft $b = 9$ (dus een vergelijking van m is $y = -\frac{4}{3}x + 9$).
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{3}{4}x + \frac{11}{4} = -\frac{4}{3}x + 9$ exact opgelost kan worden.
- $x = 3$.
- ($x = 3$ invullen in $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$ (of in $y = -\frac{4}{3}x + 9$) geeft) $y = 5$.
- Dus de afstand tussen l en P is $\sqrt{(6-3)^2 + (1-5)^2} = 5$.

36. Wiskunde B HAVO (pilot) 2015, tijdvak 2, vraag 17

Oefenvraag pilot examen 2015 tijdvak 2 – vraag 17

De cirkel c is gegeven door $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 20$.
Bovendien is gegeven het punt $A(3,1)$.
Onderzoek of A op, binnen of buiten de cirkel ligt.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- (Het middelpunt van c is $(2, -3)$, dus) de afstand van het middelpunt tot A is $\sqrt{(3-2)^2+(1- -3)^2} = \sqrt{17}$.
- (De straal van c is $\sqrt{20}$ en) $\sqrt{17} < \sqrt{20}$ dus A ligt binnen de cirkel.

37. Wiskunde B HAVO 2018, tijdvak 2, vraag 3

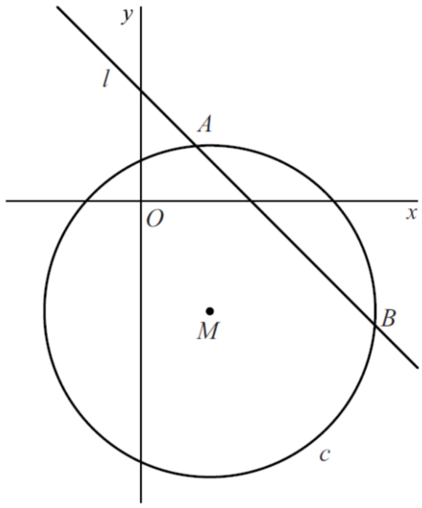
Oefenvraag examen 2018 tijdvak 2 – vraag 3

De cirkel c met middelpunt M is gegeven door de vergelijking
$x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$.

Lijn l is de lijn door het punt $A(4, 4)$ met richtingscoëfficiënt -1.
Deze lijn snijdt de cirkel behalve in het punt A ook in het punt B.
Zie figuur 1.

Bereken exact de coördinaten van B.

figuur 1



Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- Lijn l heeft een vergelijking van de vorm $y = -x + b$ en gaat door het punt $(4, 4)$, dus $y = -x + 8$.
- $y = -x + 8$ snijden met $x^2 + y^2 - 10x + 16y = 56$ geeft $x^2 + (-x + 8)^2 - 10x + 16(-x + 8) = 56$.
- Deze vergelijking herleiden tot $2x^2 - 42x + 136 = 0$.
- Herleiden tot $(x - 4)(x - 17) = 0$.
- De x-coördinaat van B is 17 (want $x = 4$ hoort bij A) en de y-coördinaat is -9 (dus $B(17, -9)$).

38. Wiskunde B HAVO (pilot) 2013, tijdvak 2, vraag 14 en 15

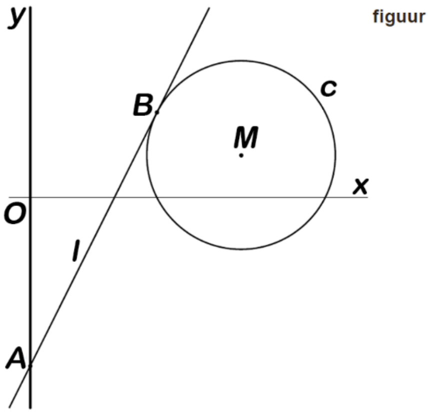
Oefenvraag pilot examen 2013 tijdvak 2 – vraag 14 en 15

Gegeven zijn de cirkel c met vergelijking $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$ en het punt $A(0, -4)$.

Van de twee raaklijnen door A aan cirkel c noemen we de raaklijn met de grootste richtingscoëfficiënt l.

De lijn l raakt de cirkel in het punt B. Zie de figuur.

Bereken exact de straal van c.



Maximumscore 3 punten (vraag 14)

Maximumscore 8 punten (vraag 15)

Het juiste antwoord is:

Vraag 14

- $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$ herschrijven tot $(x-5)^2 - 25 + (y-1)^2 - 1 + 21 = 0$.
- $(x-5)^2 - 25 + (y-1)^2 - 1 + 21 = 0$ herschrijven tot $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 5$.
- Dus de straal van c is $\sqrt{5}$.

Vraag 15

- De lijn l (gaat door $A(0,-4)$ dus) heeft een vergelijking van de vorm $y = ax - 4$.
- Voor de x-coördinaat van een gemeenschappelijk punt van l en c geldt dus $x^2 + (ax-4)^2 - 10x - 2(ax-4) + 21 = 0$.
- Dit uitwerken tot $(1 + a^2)x^2 + (-10-10a)x + 45 = 0$.
- (l en c hebben één gemeenschappelijk punt, dus deze vergelijking heeft één oplossing voor x en hieruit volgt dat) voor de discriminant D van deze vergelijking geldt: $D = 0$.
- $D = (-10 - 10a)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 45$.
- Beschrijven hoe de vergelijking $D = (-10 - 10a)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 45 = 0$ op algebraïsche wijze opgelost kan worden.
- De grootste oplossing is $a = 2$ (dus een vergelijking van l is $y = 2x - 4$).

Of:

- De lijn l (gaat door $A(0,-4)$ dus) heeft een vergelijking $y = ax - 4$ met $a = rc_l$.
- De gegeven vergelijking van c is te herschrijven tot $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 5$, dus de coördinaten van M zijn (5,1) en $BM = \sqrt{5}$ (≈ 2,236 (of nauwkeuriger)).
- $AM = \sqrt{(0-5)^2 + (-4-1)^2}$ dus $AM = \sqrt{50}$ (≈ 7,071 (of nauwkeuriger)).
- (Omdat l raakt aan c geldt) $\angle ABM = 90°$ dus $\sin(\angle BAM) = \frac{BM}{AM} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{50}}$ (of $\frac{2{,}236}{7{,}071}$) (≈ 0,316 (of nauwkeuriger)).
- Hieruit volgt $\angle BAM \approx 18{,}4°$ (of nauwkeuriger).
- (De richtingscoëfficiënt van de lijn AM is $\frac{1- -4}{5-0} = 1$ dus) de hoek tussen de lijn AM en de x-as is 45°.
- De hoek tussen l en de x-as is dus (ongeveer) 45° + 18,4° = 63,4° (of nauwkeuriger).
- Dit geeft $rc_l = \tan(63{,}4°)$ (of nauwkeuriger) dus $rc_l \approx 2{,}00$ (of $rc_l = 2$) (dus een vergelijking van l is $y = 2{,}00x - 4$) (of $y = 2x - 4$)).

Of:

- De lijn l (gaat door $A(0,-4)$ dus) heeft een vergelijking $y = ax - 4$ met $a = rc_l$.
- De gegeven vergelijking van c is te herschrijven tot $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 5$, dus de coördinaten van M zijn (5,1) en $BM = \sqrt{5}$.
- $AM = \sqrt{(0-5)^2 + (-4-1)^2}$ dus $AM = \sqrt{50}$.
- (Omdat l raakt aan c geldt) $\angle ABM = 90°$ dus Pythagoras in driehoek ABM geeft $AB = \sqrt{50-5} = \sqrt{45}$ en hieruit volgt dat B een snijpunt is van de cirkel c en de cirkel (met middelpunt A en straal $\sqrt{45}$ en dus) met vergelijking $(x - 0)^2 + (y - -4)^2 = 45$.
- Beschrijven hoe x en y op algebraïsche wijze uit deze vergelijking en de gegeven vergelijking van c opgelost kunnen worden.
- De oplossing die behoort bij de grootste richtingscoëfficiënt van l is $x = 3$ en $y = 2$ (dus de coördinaten van B zijn (3,2)).
- Dit geeft $rc_l = \frac{2- -4}{3-0} = 2$ (dus een vergelijking van l is $y = 2x - 4$).

4. Toegepaste analyse

4.1 Veranderingen

-

4.2 Afgeleide functies

39. Wiskunde B HAVO (pilot) 2014, tijdvak 2, vraag 10

Oefenvraag pilot examen 2014 tijdvak 2 – vraag 10

Op het domein [0,6π] is de functie *f* gegeven door $f(x) = x \cdot \sin x$. De helling van de grafiek van *f* in het punt (2π, 0) is te benaderen door een differentiequotiënt met Δ = 0,001 te berekenen.

Benader op deze manier de helling van de grafiek van *f* in dit punt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Maximumscore 3 punten

Het juiste antwoord is:

- Het differentiequotiënt is $\frac{f(2\pi + 0{,}001) - f(2\pi)}{0{,}001}$.
- Beschrijven hoe dit differentiequotiënt berekend kan worden.
- De gevraagde helling is 6,28.

4.3 Bepaling afgeleide functies

40. Wiskunde B HAVO 2024, tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag examen 2024 tijdvak 1 – vraag 1

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2(\frac{1}{3}x - 1)^3 - \frac{1}{2}x + 3$.

De afgeleide van f is $f'(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\frac{1}{2}$.

Bewijs dat inderdaad geldt $f'(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\frac{1}{2}$.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- De afgeleide van $2(\frac{1}{3}x - 1)^3$ is $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2(\frac{1}{3}x - 1)^2$
- $f'(x) = 2(\frac{1}{3}x - 1)^2 - \frac{1}{2}$
- $(\frac{1}{3}x - 1)^2 = \frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$
- $f'(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 - \frac{1}{2} = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 1\frac{1}{2}$

41. Wiskunde B HAVO 2019, tijdvak 2, vraag 6

Oefenvraag examen 2019 tijdvak 2 – vraag 6

De functie f wordt gegeven door $f(x) = -(2x-3)^3 + 3x^2 - 6x + 4$.
Voor de afgeleide functie van f geldt: $f'(x) = -24x^2 + 78x - 60$.

Bewijs dat inderdaad geldt: $f'(x) = -24x^2 + 78x - 60$.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- $f'(x) = -6(2x-3)^2 + 6x - 6$
- $f'(x) = -6(4x^2 - 12x + 9) + 6x - 6$
- $f'(x) = -24x^2 + 72x - 54 + 6x - 6 = -24x^2 + 78x - 60$

Of:

- $(2x-3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$
- $(2x-3)^3 = (4x^2 - 12x + 9) \cdot (2x-3) = 8x^3 - 24x^2 + 18x - 12x^2 + 36x - 27$
- De rest van de herleiding tot $f(x) = -8x^3 + 39x^2 - 60x + 31$
- Dit geeft $f'(x) = -24x^2 + 78x - 60$

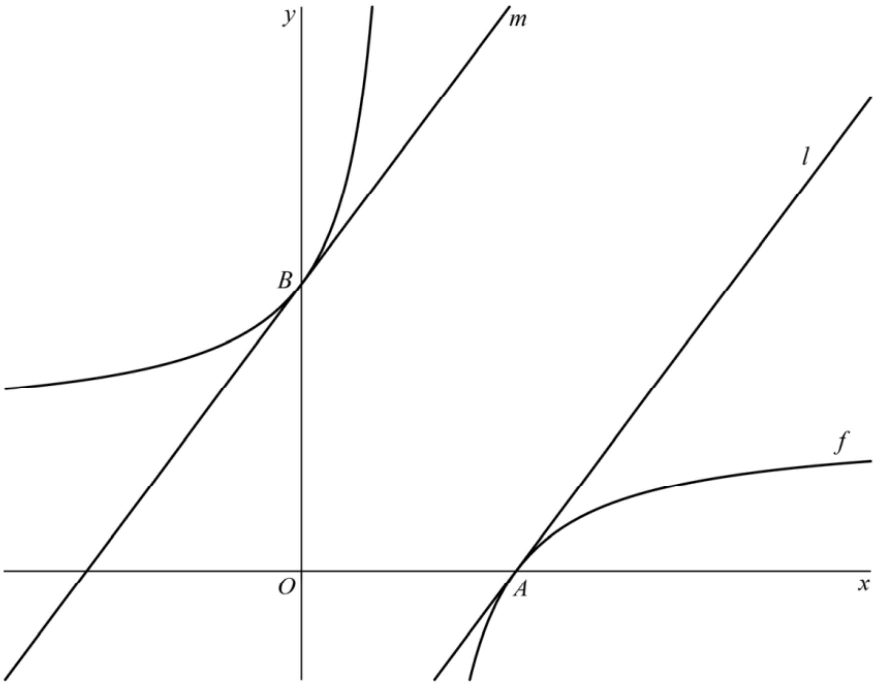
42. Wiskunde B HAVO 2022, tijdvak 3, vraag 3

Oefenvraag examen 2022 tijdvak 3 – vraag 3

De functie *f* is gegeven door $f(x) = \frac{-6}{2x-3} + 2$.

Lijn *l* is de raaklijn aan de grafiek van *f* in het punt A(3, 0) en lijn *m* is de raaklijn aan de grafiek van *f* in het punt B(0, 4). Zie figuur 1.

Figuur 1



De twee raaklijnen hebben allebei richtingscoëfficiënt $\frac{4}{3}$.

Toon dit met behulp van differentiëren aan.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

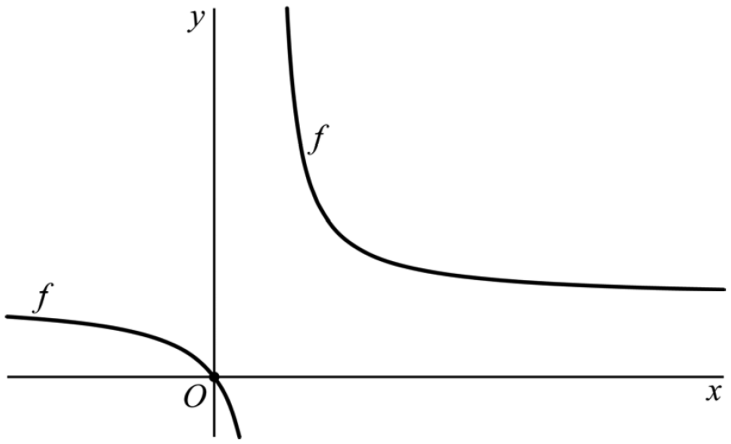
- $f'(x) = \frac{12}{(2x-3)^2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)
- $f'(3) = \frac{4}{3}$
- $f'(0) = \frac{4}{3}$

43. Wiskunde B HAVO 2021, tijdvak 1, vraag 1

Oefenvraag examen 2021 tijdvak 1 – vraag 1

De functie f wordt gegeven door: $f(x) = 1 + \frac{3}{4x-3}$
De grafiek van f gaat door de oorsprong O. Zie figuur 1.

Figuur 1



Bereken exact de helling van de grafiek van f in O.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- $f(x) = 1 + 3(4x - 3)^{-1}$
- De afgeleide van de term $3(4x - 3)^{-1}$ is $-3(4x - 3)^{-2} \cdot 4$.
- $f'(x) = -3(4x - 3)^{-2} \cdot 4$, dus de helling is $f'(0) = -\frac{4}{3}$.

4.4 Toepassing afgeleide functies

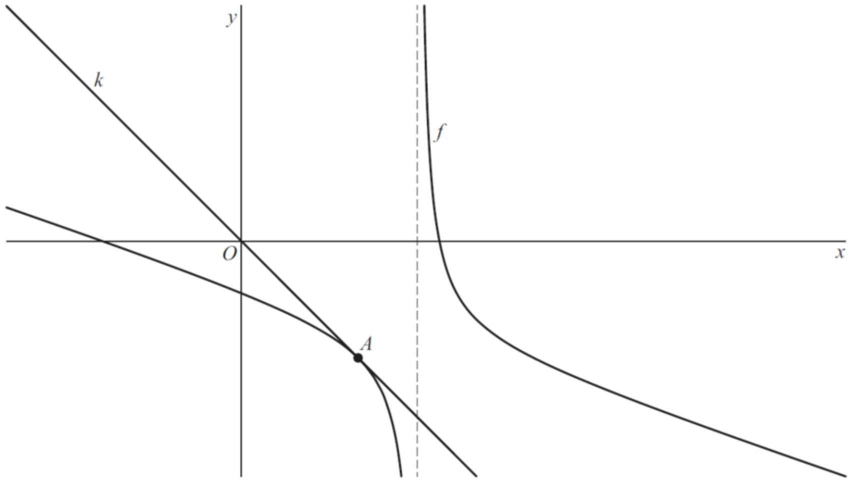
44. Wiskunde B HAVO 2018, tijdvak 1, vraag 13

Oefenvraag examen 2018 tijdvak 1 – vraag 13

De functie *f* is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2x-3} - x - 1$.

De lijn *k* raakt de grafiek van *f* in het punt *A*(1, −3). Zie figuur 1.

figuur 1



Lijn *k* gaat door de oorsprong.
Bewijs dit met behulp van differentiëren.

Maximumscore 5 punten

Het juiste antwoord is:

- $f'(x) = -\frac{2}{(2x-3)^2} - 1$.
- $f'(1) = \left(-\frac{2}{(2 \cdot 1 - 3)^2} - 1 =\right) - 3$.
- Dus k heeft een vergelijking van de vorm y = $-3x + b$.
- Invullen van de coördinaten van *A* in $y = -3x + b$ geeft $b = 0$ (dus een vergelijking voor *k* is $y = -3x$) (dus *k* gaat door de oorsprong).

Of:

- $f'(x) = -\frac{2}{(2x-3)^2} - 1$.
- $f'(1) = \left(-\frac{2}{(2 \cdot 1 - 3)^2} - 1 =\right) - 3$.
- De richtingscoëfficiënt van *OA* is gelijk aan $\frac{-3-0}{1-0} = -3$.

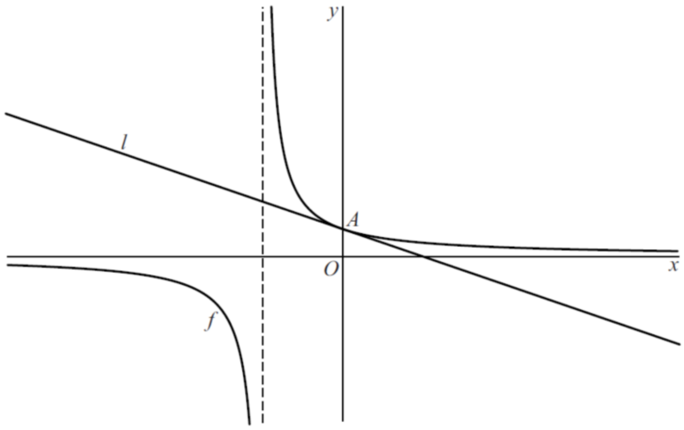
- Dus de richtingscoëfficiënt van *OA* is gelijk aan $f'(1)$ (dus *k* ligt in het verlengde van *OA*, en gaat dus door de oorsprong).

45. Wiskunde B HAVO 2017, tijdvak 1, vraag 11

Oefenvraag examen 2017 tijdvak 1 – vraag 11

De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{2x+3}$.

De grafiek van f heeft een snijpunt A met de y-as. De lijn l is de raaklijn aan de grafiek van f in A.
Zie onderstaand figuur.



Een vergelijking van l is $y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$.
Toon dit op algebraïsche wijze aan.

Maximumscore 4 punten

Het juiste antwoord is:

- $f'(x) = -2(2x+3)^{-2}$.
- $f'(0) = (-2(2 \cdot 0 + 3)^{-2} =) -\frac{2}{9}$.
- $f(0) = \frac{1}{3}$ (dus een vergelijking voor l is $y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{3}$).